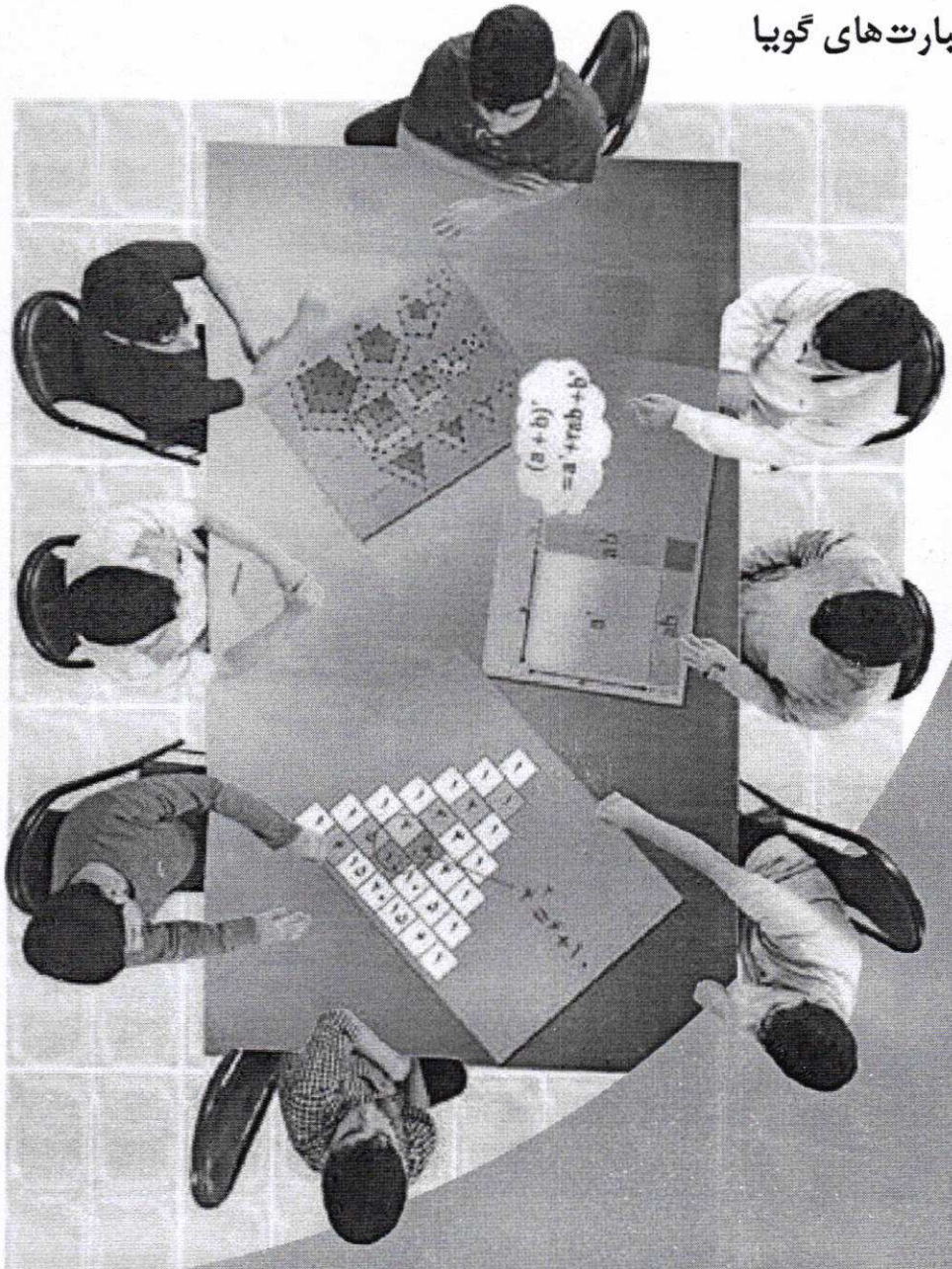
بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر
www.tafrihicenter.ir/edu
کلیک کنید
نمونه سوال
گام به گام
امتحان نهایی
جزوه
دانلود آزمون های آزمایشی
متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم
متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم
www.tafrihicenter.ir

فصل اوّل

عبارت‌های جبری

درس ۱ چند اتحاد جبری و کاربردها

درس ۲ عبارت‌های گویا



درس ۱

چند اتحاد جبری و کاربردها

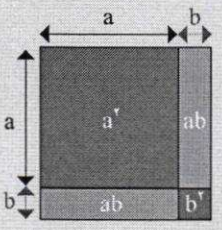
در سال قبل، با اتحادهای زیر آشنا شدید.

$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$

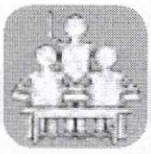
$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$

$(a+b)(a-b) = a^۲ - b^۲$

$(x+a)(x+b) = x^۲ + (a+b)x + ab$



$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$



کار درکلاس

با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $(a+۴)^۲ = a^۲ + ۸a + ۱۶$

ب) $(۳a-۱)^۲ = ۹a^۲ - ۶a + ۱$

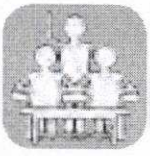
پ) $(\sqrt{۲} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}b)^۲ = ۲ + ۲b + \frac{۱}{۲}b^۲$

ت) $(\sqrt{۳} + \sqrt{۲})(\sqrt{۳} - \sqrt{۲}) = ۳ - ۲ = ۱$

ث) $(x+۴)(x+۳) = x^۲ + ۷x + ۱۲$

ج) $(۳x+۲)(۳x-۵) = (۳x)^۲ + (۲-۵)(۳x) + (۲)(-۵) = ۹x^۲ - ۹x - ۱۰$

چ) $(x+۱)(x+۲) = x^۲ + ۳x + ۲$



کار درکلاس

با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای، اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

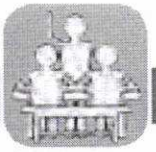
الف) $۹x^۲ - ۱۶ = (۳x-۴)(۳x+۴)$

مثلث خیام[1]

در اینجا باید به رخداد مهمی که با شناسایی کتاب جبر و مقابله خیام در اروپا صورت گرفت بپردازیم. می‌دانیم که صورت بسط یافتهٔ دوجمله‌ای به طراحی مثلثی عددی می‌انجامد که پیش‌ازاین مثلث نیوتن-پاسکال نامیده می‌شد.

در اواسط قرن بیستم دانشمندان اروپایی علاقه‌مند به بررسی تاریخ ریاضیات در سرزمین‌های اسلامی از خود پرسیدند: «آیا ممکن است این روش بسط دوجمله‌ای‌ها در سرزمین‌های اسلامی و به وسیله دانشمندان اسلامی نیز صورت گرفته باشد؟» نخستین بررسی‌ها به حضور این‌بسط در کتاب مفتاح الحساب غیاث‌الدین جمشید کاشانی رسید و در ادامه روشن شد این‌بسط به دانشمندی پیش از کاشانی یعنی خواجه نصیرالدین طوسی باز می‌گردد و در فصل اول از کتاب جوامع‌الحساب طوسی دیده می‌شود. ادامه پژوهش‌ها نیز ردپای این‌بسط را به کتاب جبر و مقابلهٔ خیام رساند و مشخص شد برای اولین‌بار در سرزمین‌های اسلامی و حدود شش‌قرن قبل از نیوتن، خیام این دو جمله‌ای را در کتاب خود بسط داده است.

۱. حکیم، عمرخیام - علی‌اکبر ولایتی انتشارات آفتاب، تهران. ۱۳۸۹.



کار در کلاس

عبارت جبری $(a+b)^3$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای و حاصل ضرب عبارت‌های جبری ساده کنید.

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = \ldots$

برای ساده کردن $(a+b)^4$، چگونه عمل می‌کنید؟ آیا این پرسش را می‌توان برای توان‌های بزرگ‌تر از ۴ نیز طرح کرد؟ آیا روشی وجود دارد که بتوان بدون ساده کردن عبارت‌های حاصل‌ضرب، جواب نهایی را به‌دست آورد؟

فعالیت زیر پاسخ مناسبی برای سؤال بالاست.

فعالیت

جدول زیر را درنظر بگیرید.

$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = 1a + 1b$	1 1
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = \square a^4 + \square a^3b + \square a^2b^2 + \square ab^3 + \square b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5 = 1a^\square + 5a^\square b^\square + 10a^\square b^\square + 10a^\square b^\square + 5ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1
. . .	. . .

۱. در جدول بالا سمت چپ (مثلث خیام)، چه ارتباطی بین سطر دوم و سطر سوم وجود دارد؟ چه ارتباطی بین سطر سوم و سطر چهارم وجود دارد؟ چه رابطه‌ای بین سطر چهارم و سطر پنجم وجود دارد؟

ب) $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=x^2+2(\frac{1}{3})x+(\frac{1}{3})^2=(x+\frac{1}{3})^2$

پ) $4x^2-4x+1=(2x)^2-2(2x)+(1)^2=(2x-1)^2$

ت) $y^2+3y-10=y^2+(5-2)y-(5)(2)=(y-2)(y+5)$

ث) $9x^2+18x+8=(3x)^2+6\times(3x)+8$

$=(3x)^2+(2+4)(3x)+(2)(4)$

$=(3x+2)(3x+4)$

آفرینش، دفترش تا باز شد
با «حساب» و «هندسه» آغاز شد
دستِ حق تا نقشِ عالم می‌نگاشت
در سِرشت «دایره»، «پی» می‌گذاشت
شکل‌های هندسی و «مُنتظم»
او نهاده در نهادِ هر قلم
با «مثلّث»، «دایره»، یا «مستطیل»
می‌شود اندام این عالم شکیل!
آسمان، از اختران پر کرده است
روز و شب را در «تناظر» کرده است
این همه مجموعه‌های بی‌نظیر
کهکشان‌های «شمارش‌ناپذیر»!
نظم این اعداد، در اوجِ کمال
در تناسب گشته عالم، بی‌مثال
زلفِ عالم تا پریشان می‌شود
این ریاضی، شانه‌های آن می‌شود!
یا به اِستقراء و یا «برهان خُلف»
می‌شود شانه، پریشانیِ زلف!
باز، بین جغرافیای بی‌حدود
کوه‌ها بر دشت‌ها گشته «عمود»!
از حیات و از جَماد و از نبات
پُر نمود این «دستگاه مختصات»

کار در کلاس

عبارت‌های جبری زیر را به‌صورت ساده‌ترین حالت، تجزیه کنید.

الف) $12x^7(x^2+6)^3-8x^5(x^2+6)^4$

$=4x^5(x^2+6)^3(3x^2-2(x^2+6))$

$=4x^5(x^2+6)^3(x^2-12)$

$=4x^5(x^2+6)^3(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})$

ب) $x^8-64x^4=x^4(x^4-64)$

$=x^4(x^2-8)(x^2+8)$

$=x^4(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})(x^2+8)$

کار در کلاس

بعضی از محاسبات عددی را می‌توان با کمک اتحادها، به‌راحتی انجام داد. تساوی‌های زیر را کامل کنید.

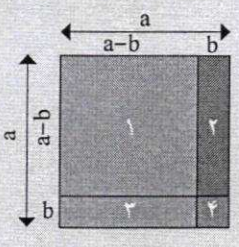
الف) $(999)^2=(1000-1)^2=\ldots$ $(1000)^2-2(1000)(1)+(1)^2=1000000-2000+1=998001$

ب) $96\times104=(100-4)(100+4)=100^2-4^2=10000-16=9984$

پ) $(102)^2=(100+2)^2=\ldots+\ldots$ $100^2+2(100)(2)+2^2=10000+400+4=10404$

ت) خودتان نیز یک مثال عددی بزنید که برای محاسبهٔ آن از اتحادها، کمک گرفته‌اید.

ث) آیا کاربرد دیگری از اتحادها، به ذهن شما می‌رسد؟ لطفاً توضیح دهید.



مساحت مربع:

(۱) $S_1=(a-b)^2$

$S_1=S-S_2-S_3-S_4$

(۲) $=a^2-b(a-b)-b(a-b)-b^2$

$=a^2-2ab+b^2$

(۱) و (۲) $\Rightarrow(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

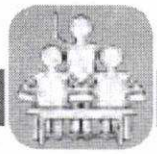
اشتباه چاپی

ت) $507\times493=(500+7)(500-7)=500^2-7^2$

$=250000-49=249951$

ث) در حساب کردن مساحت مربع

* $2^{10} = 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1$
$= 1024$



کار در کلاس

در تساوی‌های زیر، به‌جای علامت سؤال، عدد مناسب قرار دهید:

$1 = 2^{?}$ ۰

$1+1 = 2^{?}$ ۱

$1+2+1 = 2^{?}$ → ۲

$1+3+3+1 = 2^{?}$ → ۳

$1+4+6+4+1 = 2^{?}$ → ۴

– چه ارتباطی بین توان‌های عدد۲ و سطرهای واقع در مثلث خیام وجود دارد؟ توان عدد ۲، یکی کمتر از شماره سطر است.

– آیا می‌توانید الگویی برای توان‌های عدد۲، برحسب سطرهای واقع در مثلث خیام حدس بزنید؟ اگر n شماره سطر باشد 2^{n-1}

– براساس این الگو مقدار 2^{10} را به‌دست آورید. *

– آیا می‌توانید مانند الگوی بالا، الگوهای دیگری از مثلث خیام حدس بزنید؟ توان n ام عدد ۲ برابر است با جمع اعداد سطر $(n+1)$ ام مثلث خیام

کار در کلاس

توان‌های مختلف ۱۱ را، به‌دست آورید.

$11^0 = 1$

$11^1 = 11$

$11^2 = (1+10)^2 = 1+2\times10+10^2 = 1+20+100 = 121$

$11^3 = (1+10)^3 = \ldots+\ldots+\ldots+\ldots = 1+30+\ldots+1000 = 1331$

$11^4 = (1+10)^4 = 1+4\times10+\ldots+\ldots+10^4 = 14641$

– چه ارتباطی بین توان به‌دست آمده در 11^2 و اعداد واقع در سطر سوم مثلث خیام وجود دارد؟ توان ۲ عدد ۱۱ از کنار هم قرار گرفتن اعداد سطر سوم مثلث خیام بدست می آید.

– چه ارتباطی بین توان به‌دست آمده در 11^3 و اعداد واقع در سطر چهارم مثلث خیام وجود دارد؟ توان ۳ عدد ۱۱ از کنار هم قرار گرفتن اعداد سطر چهارم مثلث خیام بدست می آید.

– چه ارتباطی بین توان به‌دست آمده در 11^4 و اعداد واقع در سطر پنجم مثلث خیام وجود دارد؟ توان ۴ عدد ۱۱ از کنار هم قرار گرفتن اعداد سطر پنجم مثلث خیام بدست می آید.

– آیا می‌توانید بدون هیچ‌گونه محاسبه‌ای 11^5 را برحسب اعداد واقع در سطر ششم مثلث خیام به‌دست آورید؟

– چه نتیجه‌ای می‌توانید برای توان‌های مختلف ۱۱، بگیرید؟ *

سطر ششم ۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

$11^5 = 161051$

* توان n ام عدد ۱۱ برابر است با عددی که از کنار هم قرار گرفتن اعداد سطر $(n+1)$ ام مثلث خیام بدست می آید

نکته: اگر عددی از ۹ بیشتر باشد مانند واحد کامل محاسبه می‌شود و به رقم قبلی اضافه می‌شود

۲. آیا می‌توانید سطرهای هفتم و هشتم را کامل کنید؟

۳. چه ارتباطی بین سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب عبارت‌های جبری سطرهای جدول بالا در سمت راست وجود دارد؟

۴. آیا می‌توانید ضرایب $(a+b)^4$ را در جدول سمت راست، کامل کنید؟

۵. آیا می‌توانید توان‌های a و b در عبارت $(a+b)^5$ در جدول سمت راست را کامل کنید؟

۶. آیا توانسته‌اید حدس بزنید که چه ارتباطی بین اعداد سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب توان‌های $(a+b)$ وجود دارد؟

۷. با توجّه به اینکه $a-b=a+(-b)$، حاصل عبارت $(a-b)^3$ را براساس اتحاد $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ به‌دست آورید.

با توجّه به مثلث خیام، اتحادهای زیر را خواهیم داشت :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b+3ab^2-b^3$$

کار در کلاس

با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی‌های زیر را کامل کنید :

الف) $(2a+1)^3 = 8a^3+12a^2+6a+1$

ب) $(\frac{1}{3}a-2)^3 = \frac{1}{27}a^3 - 3(\frac{1}{3}a)^2(2)+12a-8$

پ) $(4a-2b)^3 = 64a^3 - 96a^2b + 48ab^2 - 8b^3$

ت) $(3a+\frac{1}{2})^3 = 27a^3 + \frac{27}{2}a^2 + \frac{9}{4}a + \frac{1}{8}$

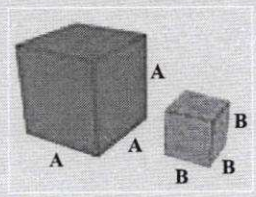
$(a \mp b)(a^2 \pm ab + b^2) = a^3 \mp b^3$

(مکعب) ∓ (مکعب) = (مربع) (حاصلضرب + مربع ∓ جمله اول ∓ جمله دوم)

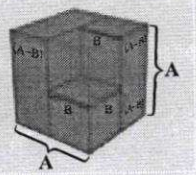
(جمله اول ∓ جمله دوم)

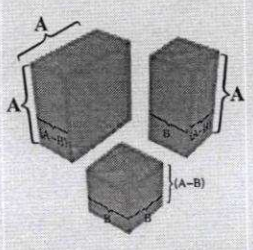
جمله دوم ∓ جمله اول = جمله دوم

کار در کلاس



A^3-B^3





$(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$

با توجّه به اتحادهایی که تاکنون آموخته‌اید، اتحادهای زیر را با اسـتفاده از حاصل‌ضرب عبارت‌های جبری بررسی کنید و تساوی دوطرف را نشان دهید. سپس عبارت کلامی این اتحادها را بنویسید.

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

اتحاد مجموع مکعب دوجمله‌ای

فعالیت

با استفاده از اتحادهای بالا، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

$8y^3-1=(2y)^3-1^3=(2y-1)((2y)^2+(2y)+1^2)$

$=(2y-1)(4y^2+2y+1)$

$8a^3+1=(2a)^3+1^3=(2a+1)((2a)^2-2a+1)=$

$8a^3+b^3=(2a)^3+b^3=(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$

$t^6-\frac{1}{8}=(t^2)^3-(\frac{1}{2})^3=(t^2-\frac{1}{2})(t^4+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4})$

تمرین

۱. با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$(x-1)^2$, $(y+\frac{1}{4})^2$, $(2-\frac{a}{3})^2$, $(2z-\frac{1}{2})^3$, $(\frac{1}{4}+\frac{b}{3})^3$

۲. با استفاده از اتحادها، در قسمت‌های نقطه‌چین، عبارت مناسب بگذارید.

$(a+\sqrt{۲})^۲ = a^۲ + \cdots + ۲$

$(۱ - ۲x)^۲ = ۱ - ۴x + \ldots$

$(\sqrt{۳} + x)^۳ = ۳\sqrt{۳} + \cdots + ۳\sqrt{۳}x^۲ + \cdots$

۳. به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$x^۶ - ۱ \; , \; ۱ + z^۳ \; , \; ۸ - t^۶$

$۹x^۲ - ۶x + ۱$

$۲۵x^۲ + ۲۵x + ۶$

$۴x^۲ + ۱۴x + ۱۲$

۴. کدام یک از عبارت‌های زیر، نشـان‌دهندهٔ اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای یا اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای است؟

$(۳x + ۵)(۹x^۲ - ۲۰x + ۱۵)$, $(x + ۲)(x^۲ - ۲x + ۴)$

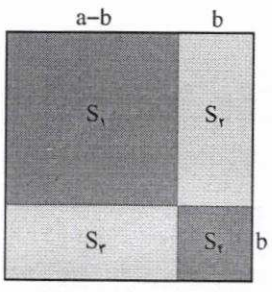
$(۴x + y)(۱۶x^۲ + ۴xy + y^۲)$, $(۷x - ۲)(۴۹x^۲ + ۱۴x + ۴)$

۵. عبارت‌های جبری زیر را به ساده‌ترین عبارت‌ها تجزیه کنید.

الف) $۱۲x^۶(x^۲+۵)^۳ - ۱۰x^۴(x^۲+۵)^۴$

ب) $x^۸ - ۶۲۵x^۴$

۶. مربع روبه‌رو را که اندازهٔ ضلع آن a است، درنظر بگیرید و فرض کنید مسـاحت آن برابر با S است. ضلع آن را به دو پاره‌خط تقسیم کنید و طول یکی را b در نظر بگیرید.



الف) مساحت‌های $S_۱$ ، $S_۲$، $S_۳$ و $S_۴$ را به‌دست آورید.

ب) مسـاحت S را برحسـب مسـاحت‌های $S_۱$ ، $S_۲$، $S_۳$ و $S_۴$ به‌دست آورید.

پ) اتحاد مربع دو جمله‌ای را از قسمت (ب) نتیجه بگیرید.

۷. با استفاده از اتحادهایی که آموختید، عبارت‌های عددی زیر را به‌دست آورید.

$(۹۹)^۳ = (۱۰۰ - ۱)^۳ = \ldots$

$(۱۰۰۱)^۳ = \ldots$

تمرین‌های صفحه ۱۵ و ۱۶

۱-

$(x-1)^2 = (x)^2 - 2(x)(1) + (-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$(y+\frac{1}{4})^2 = (y)^2 + 2(y)(\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4})^2 = y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}$

$(2-\frac{a}{3})^2 = (2)^2 - 2(2)(\frac{a}{3}) + (\frac{a}{3})^2 = 4 - \frac{4}{3}a + \frac{a^2}{9}$

$(2z-\frac{1}{2})^3 = (2z)^3 - 3(2z)^2(\frac{1}{2}) + 3(2z)(\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^3 = 8z^3 - 6z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{1}{8}$

$(\frac{1}{4}+\frac{b}{3})^3 = (\frac{1}{4})^3 + 3(\frac{1}{4})^2(\frac{b}{3}) + 3(\frac{1}{4})(\frac{b}{3})^2 + (\frac{b}{3})^3 = \frac{1}{64} + \frac{1}{16}b + \frac{1}{12}b^2 + \frac{b^3}{27}$

۲-

$(a+\sqrt{2})^2 = a^2 + 2\sqrt{2}a + 2$

$(1-2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$

$(\sqrt{2}+x)^4 = 4\sqrt{2} + 8x + 4\sqrt{2}x^2 + x^4$

۳-

$x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

$1+z^3 = (1+z)(1-z+z^2)$

$8 - t^4 = (2-t^2)(4+2t^2+t^4) = (\sqrt{2}-t)(\sqrt{2}+t)(4+2t^2+t^4)$

$9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2$

$(3x)^2 \quad 2(3x) \quad (1)^2$

$25x^2 + 20x + 4 = (5x+2)(5x+2)$

$(5x)^2 \quad +2(5x) \quad (+2)(+2)$

$4x^2 + 16x + 12 = (2x+2)(2x+6)$

$(2x)^2 \quad 4(2x) \quad (2)(6)$

تمرین های صفحه ۱۶

۴- ✗ $(۳x+۵)(۹x^۲-۲۰x+۱۵)$ → باید $-۱۵x$ باشد

✓ $(x+۲)(x^۲-۲x+۴)$

✗ $(۴x+y)(۱۶x^۲+۴xy+y^۲)$ → باید $۴xy$ باشد

✓ $(۷x-۲)(۴۹x^۲+۱۴x+۴)$

۶-

الف) $S_۱ = (a-b)^۲ = a^۲-۲ab+b^۲$

$S_۲ = b(a-b) = ab-b^۲$

$S_۳ = (a-b)b = ab-b^۲$

$S_۴ = (b)^۲ = b^۲$

ب) $S = S_۱+S_۲+S_۳+S_۴ = (a^۲-۲ab+b^۲)+(ab-b^۲)+(ab-b^۲)+(b^۲) = a^۲$

ب) $(a-b)^۲+۲(a-b)(b)+b^۲ = a^۲ \Rightarrow$

$(a-b)^۲ = a^۲-b^۲-۲(a-b)(b) \Rightarrow (a-b)^۲ = a^۲-b^۲-۲ab+۲b^۲$

$\Rightarrow (a-b)^۲ = a^۲-۲ab+b^۲$

۵-

الف) $۱۲x^۶(x^۲+۵)^۳-۱۰x^۴(x^۲+۵)^۴ = ۲x^۴(x^۲+۵)^۳[۶x^۲-۵(x^۲+۵)]$

$= ۲x^۴(x^۲+۵)^۳(x^۲-۲۵) = ۲x^۴(x^۲+۵)^۳(x-۵)(x+۵)$

ب) $x^۸-۴۲۵x^۴ = x^۴(x^۴-۴۲۵) = x^۴(x^۲+۲۵)(x^۲-۲۵)$

$= x^۴(x^۲+۲۵)(x+۵)(x-۵)$

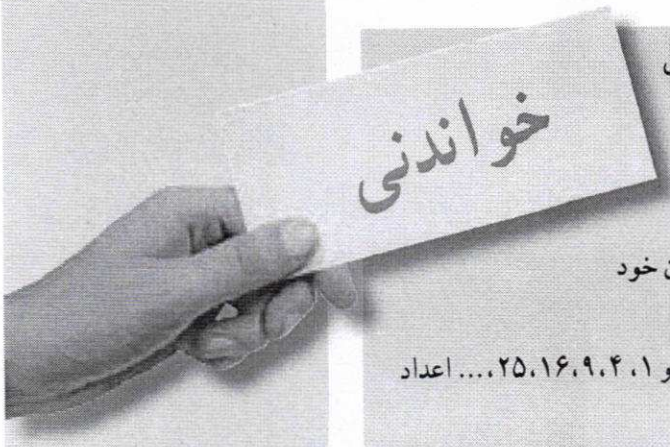
---

۷) $(۱۰۰۱)^۳ = (۱۰۰۰+۱)^۳ = (۱۰۰۰)^۳+۳(۱۰۰۰)^۲(۱)+۳(۱۰۰۰)(۱)+(۱)^۳ = ۱۰۰۰۰۰۰۰۰+۳۰۰۰۰۰۰+۳۰۰۰+۱$

$= ۱۰۰۳۰۰۳۰۰۱$

$(۹۹)^۳ = (۱۰۰-۱)^۳ = (۱۰۰)^۳-۳(۱۰۰)^۲(۱)+۳(۱۰۰)(۱)^۲-(۱)^۳$

$= ۱۰۰۰۰۰۰-۳۰۰۰۰+۳۰۰-۱ = ۹۷۰۲۹۹$



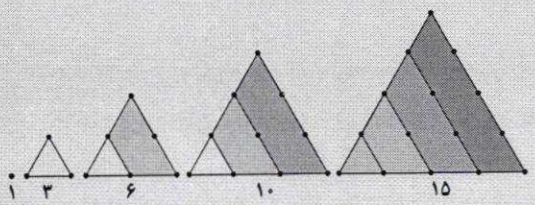
ابوعلی‌سینا، دانشمند مسلمان ایرانی که در قرن سوم و چهارم هجری قمری زندگی می‌کرده است، در کتاب شفا، از اعداد مثلثی، اعداد مربعی، اعداد مخمسی و ... سخن گفته است و دربارهٔ خواص آنها، نکاتی را ذکر کرده است.

در زیر اعداد مثلثی و اعداد مربعی، به همراه جمله‌ای به زبان خود ابوعلی‌سینا در مورد رابطهٔ بین این اعداد آمده است.

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ... اعداد مثلثی و ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ... اعداد مربعی‌اند.

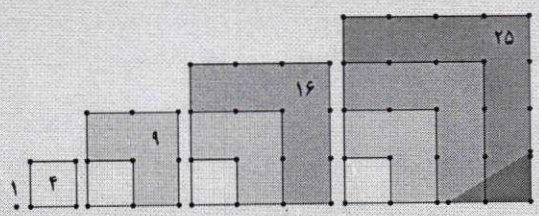
حال مثلث خیام را یک بار دیگر نگاه کنید.

عددهای مثلثی



این اعداد در این مثلث قابل مشاهده‌اند و می‌توان یک الگو براساس اعداد واقع در مثلث خیام برای سایر اعداد به‌دست آورد.

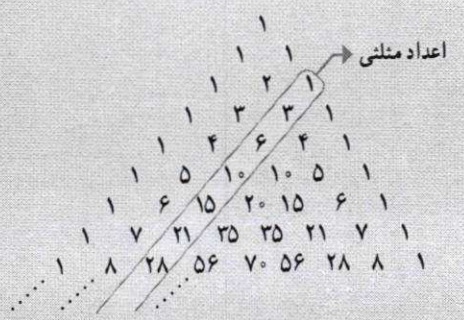
عددهای مربعی



فَیَکونُ کُلُّ مُرَبَّعٍ مِن مُثَلَّثٍ فی دَرَجَتِهِ وَ مُثَلَّثٍ أنقَصَ مِن دَرَجَتِهِ بِواحِدٍ

مجموع هر عدد مثلث و عدد مثلث ماقبل آن مساوی است با عدد مربع همان مرتبه

مثلث خیام



چگونه می‌توانید ارتباط بین اعداد مثلثی، اعداد مربعی و اعداد مخمسی از طریق مثلث خیام به‌دست آورید؟

درس ۲

عبارت‌های گویا

در سال گذشته با عبارت‌های گویا و ساده‌کردن آنها، همچنین با جمع و تفریق این عبارت‌ها آشنا شدید. از آنجا که امسال، چند اتحاد دیگر را آموختید، در ادامه به یادآوری و تکمیل این مطالب می‌پردازیم.

کسرهایی را که صورت و مخرج آنها چندجمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامند. اگر صورت یا مخرج کسری، پس از ساده شدن، چندجمله‌ای نباشد، در این صورت آن عبارت گویا نیست.

فعالیت

عبارت‌های گویا را با ☑ و عبارت‌های غیرگویا را با ☒ مشخص کنید.

$\frac{x-3}{2x^2-3x+5}$ ☑	$\frac{1}{x^4-\sqrt{2}}$ ☑	$\sqrt{x^2+1}$ ☒
x^2+3x-4 ☑	$\frac{\sqrt{5}x}{x}$ ☑	$\frac{x+y}{3\sqrt{z}}$ ☒
$\frac{|x|}{x^2+2}$ ☒	$\sqrt{x}$ ☒	$\frac{x^2-1}{x+1}$ ☑

مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنا است که مخرجش صفر نباشد؛ یعنی در حالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، آنگاه مقدار عبارت گویا تعریف نشده است. برای مثال عبارت گویای $\frac{x+2}{x-5}$ به‌ازای $x=5$ تعریف نشده است؛ زیرا با قراردادن $x=5$ در آن، مخرج کسر برابر با صفر می‌شود و در این حالت کسر تعریف نشده است.

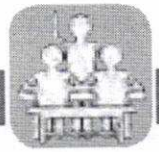
الف) $3z-5=0 \quad 3z=5 \quad z=\frac{5}{3}$ به ازای $z=\frac{5}{3}$ تعریف شده است.

ب) $\sqrt{2}\neq 0$ همه اعداد تعریف شده‌اند.

پ) $(a-2)(a+2)=0 \Rightarrow a-2=0 \Rightarrow a=2$ به ازای $a=2$ و $a=-2$ تعریف شده است.
$a+2=0 \Rightarrow a=-2$

ت) $a^2-4=0$

ج) $x^2+1\neq 0$ به ازای هر اعداد تعریف شده است.



کار در کلاس

کدام‌یک از عبارت‌های زیر گویا و کدام‌یک غیرگویا هستند؟ عبارت‌های گویا به‌ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

الف) $\frac{3z+5}{3z-5}$ ✓

ب) $\frac{x+9}{\sqrt{x}-3}$ ✗

پ) $\frac{4x^2-5x+1}{7\sqrt{2}}$ ✓

ت) $\frac{a^2+3}{a^2-4}$ ✓

ث) $\frac{x\sqrt{x}+1}{3-x}$ ✗

ج) $\frac{5x^2+1}{x^2+1}$ ✓

ساده کردن عبارت‌های گویا

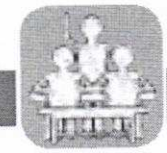
اگر a و b و k عددهایی حقیقی باشند؛ به‌طوری که $b,k\neq 0$ در این صورت داریم:

$$\frac{ka}{kb}=\frac{a}{b}(k,b\neq 0)$$

زیرا با تقسیم صورت و مخرج کسر بر $k\neq 0$، کسر را ساده کرده‌ایم:

$$\frac{ka}{kb}=\frac{\frac{ka}{k}}{\frac{kb}{k}}=\frac{a}{b}$$

برای ساده‌کردن یک عبارت گویا، ابتدا باید صورت و مخرج آن را تجزیه کنیم، سپس با خط کشیدن روی عوامل مشترک از صورت و مخرج کسر، عبارت گویا ساده می‌شود. (یادآوری می‌کنیم، عامل مشترکی که از صورت و مخرج کسر خط می‌زنیم باید مخالف صفر باشد.)



کار در کلاس

۱. مانند نمونه‌های حل‌شده، کسرهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}=\frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)}$

صورت کسر را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای و مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کرده‌ایم.

$=\frac{(x+3)\cancel{(x+3)}}{(x-3)\cancel{(x+3)}}$

با شرط $x+3\neq 0$ از صورت و مخرج کسر عامل $(x+3)$ را خط زده‌ایم. توجه کنید که برای بامعنی‌بودن کسر باید $x-3\neq 0$ باشد.

$=\frac{(x+3)}{(x-3)}$ (ساده‌شدهٔ کسر)

صورت کسر را به کمک اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای و مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنید.

ب) $\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$

با شرط $x-1\neq 0$ از صورت و مخرج کسر عامل $(x-1)$ را خط بزنید. توجه کنید که برای بامعنی‌بودن کسر باید $x+1\neq 0$ باشد.

$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{x^2+x+1}{x+1}$ (ساده‌شدهٔ کسر)

پ) $\frac{4x^2-9}{4x^2+10x+6}=\frac{(2x-3)(2x+3)}{(2x+2)(2x+3)}=\frac{2x-3}{2x+2}$

ت) $\frac{x^4-8x}{2x^2-8x+8}=\frac{x(x^3-8)}{2(x^2-4x+4)}=\frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)(x-2)}=\frac{x(x^2+2x+4)}{2(x-2)}$

ث) $\frac{6x^5(x^2+4)^2-4x^3(x^2+4)^3}{x^8-16x^4}$

۲. کسر زیر به‌صورت **نادرست** ساده شده است. ایراد آن را پیدا کنید و دربارهٔ آن توضیح دهید.

$\frac{2x^3+y^2}{y^2}=\frac{2x^3+y^2}{y^2}=2x^3+1$

فقط اگر بین عوامل صورت و مخرج ضرب باشد می‌توان جملات را ساده کرد.

۳. فرض کنیم $x=1$ است، دانش‌آموزی با توجه به این فرض، ثابت کرده است که $2=1$ است استدلال زیر را دنبال کنید و بگویید اشتباه در کجا اتفاق افتاده است.

$x=1$

$x^2=x$

$x^2-1=x-1$

چون بر عامل صفر تقسیم کرده است.

$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}$

$\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=1$

$x+1=1\xrightarrow{x=1}2=1$

ت) $\frac{6x^5(x^2+4)^2-4x^3(x^2+4)^3}{x^8-16x^4}=\frac{2x^3(x^2+4)^2\left(3x^2-2(x^2+4)\right)}{x^4(x^4-16)}$

$=\frac{2x^3(x^2+4)^2(x^2-8)}{x^4(x^2+4)(x^2-4)}=\frac{2(x^2+4)(x^2-8)}{x(x^2-4)}$

۱) $P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$Q(x) = x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$

۲) $\frac{A(x)}{P(x)} = \frac{(x-1)^2(x+4)}{(x-1)^2} = (x+4)$ ، $\frac{A(x)}{Q(x)} = \frac{(x-1)^2(x+4)}{(x-1)(x+4)} = (x-1)$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا باید «مخرج مشترک»گیری کنیم. برای این منظور ابتدا با انجام فعالیت زیر مفهوم مخرج مشترک را درک می‌کنید؛ سپس در ادامه جمع و تفریق عبارت‌های گویا می‌آید.

فعالیت

چندجمله‌ای‌های $P(x) = x^2 - 2x + 1$ و $Q(x) = x^2 + 5x - 6$ را در نظر بگیرید.

۱. چندجمله‌ای‌های بالا را تجزیه کنید.

۲. عبارت‌های مشترک در تجزیهٔ این دو چندجمله‌ای را مشخص کنید. $x-1$

۳. عبارت‌های غیرمشترک در تجزیهٔ این دو چندجمله‌ای را مشخص کنید. $(x+4)$

۴. حاصل‌ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان را در عبارت‌های غیرمشترک پیدا کنید و آن را $A(x)$ بنامید. $A(x) = (x-1)^2(x+4)$

۵. عبارت‌های $\frac{A(x)}{Q(x)}$ ، $\frac{A(x)}{P(x)}$ را ساده کنید.

۶. با توجه به قسمت قبل آیا $A(x)$ مضرب مشترک دو عبارت $P(x)$ و $Q(x)$ است؟ بله

۷. آیا می‌توانید مضرب‌های مشترک دیگری برای $P(x)$ و $Q(x)$ پیدا کنید؟ بله *

۸. از بین مضرب‌های مشترکی که برای $P(x)$ و $Q(x)$ یافتید، کدام یک نسبت به متغیّر x درجهٔ کوچک‌تری دارد؟ $A(x)$

مضرب مشترک دو عبارت $(x-1)$ ، $(x+1)$ چندجمله‌ای (x^2-1) است. از طرفی $(x^2-1)^2$ یا $(x^2-1)^3$ یا $(x^2-1)^4$ مضرب‌های مشترک این دو عبارت هستند، اما (x^2-1) مضرب مشترکی است که نسبت به متغیّر x از درجهٔ کوچک‌تر است.

برای پیدا کردن مضرب مشترک دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ به‌طوری که نسبت به x از کوچک‌ترین درجه باشد، ابتدا هریک از چندجمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم؛ سپس حاصل‌ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان در عبارت‌های غیرمشترک را به‌دست می‌آوریم و آن را $A(x)$ می‌نامیم. برای جمع یا تفریق دو عبارت گویا که مخرج‌های آنها $P(x)$ و $Q(x)$ باشند؛ عبارت $A(x)$ را مخرج مشترک دو کسر تعریف می‌کنیم.

* ۷) مثال ۱ $(x-1)^3(x+4)$

مثال ۲ $(x-1)^2(x+4)^2$

مثال ۳ $7(x-1)^2(x+4)$

مثال ۴ $(x-1)^2(x+4)(x+3)$

کار در کلاس

۱. در هر قسمت مضرب مشترکی از چندجمله‌ای‌ها را به‌دست آورید؛ به‌طوری که نسبت به متغیّر a آن کوچک‌ترین توان را داشته باشد.

الف) $P(a)=a^2+6a+9$ $=(a+3)^2$

$Q(a)=a^2-9$ $=(a-3)(a+3)$

$P\cdot Q=(a+3)^2(a-3)$

ب) $P(a)=a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a-b)(a+b)$

$Q(a)=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$P\cdot Q=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^2+ab+b^2)$

پ) $P(a)=a^4+2a^3-3a^2=a^2(a^2+2a-3)=a^2(a-1)(a+3)$

$Q(a)=a^3+8a^2+15a=a(a^2+8a+15)=a(a+3)(a+5)$

جواب $=a^2(a+3)(a+5)(a-1)$

(اشتباه چاپی (باید ۱۵ باشد))

(اشتباه چاپی پرانتز اضافه شود.)

حاصل‌ضرب عبارت‌های غیرمشترک — حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان

۲. برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا، ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم. مخرج مشترک همان مضرب مشترک بین مخرج‌ها با کوچک‌ترین توان نسبت به x است. در زیر مخرج مشترک کسرها را مانند نمونه پیدا کنید.

الف) $\frac{4}{x^2+x}+\frac{1}{(x^2-1)(x+1)}$

مخرج کسر اول $A(x)=x^2+x=x(x+1)$

مخرج کسر دوم $B(x)=(x^2-1)(x+1)=(x-1)(x+1)^2$

مخرج مشترک $=x(x-1)(x+1)^2$

ب) $\frac{x-2}{x-3}-\frac{x+1}{x+2}$

$P\cdot Q=(x-3)(x+2)$

مخرج کسر اول $=x-3$

مخرج کسر دوم $=x+2$

پ) $\frac{1}{x^4-8x}-\frac{1+x}{x^2}+\frac{x+2}{x-2}$

مخرج کسر اول $=x^4-8x=x(x^3-8)=x(x-2)(x^2+2x+4)$

مخرج کسر دوم $=x^2$

$P\cdot Q=x^2(x-2)(x^2+2x+4)$

مخرج کسر سوم $=x-2$

فعالیت

عبـارت $P(x)=\frac{۴}{x^۲+x}+\frac{x}{x^۲-۱}$ را در نظر بگیرید. با توجه به «کار در کلاس» قبل، مخرج مشـترک این دو کسر برابر است با:

مخرج مشترک $= x(x-۱)(x+۱)$

زیرا :

$$P(x)=\frac{۴}{x(x+۱)}+\frac{x}{(x-۱)(x+۱)}$$

۱. مخرج کسر اول را با مخرج مشترک مقایسه کنید. برای اینکه مخرج کسر اول مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر اول را در چه عبارتی ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

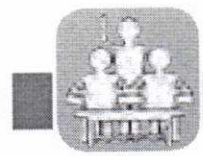
$$\frac{۴}{x(x+۱)}=\frac{۴(x-۱)}{x(x+۱)(x-۱)}$$

۲. برای اینکه مخرج کسر دوم مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر دوم را در کدام عبارت ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

$$\frac{x}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{x(x)}{(x-۱)(x+۱)(x)}$$

۳. همان‌طور که می‌بینید، مخرج کسـرهای اول و دوم یکسـان شـده‌اند. در زیر این دو کسـر را با هم جمع کرده‌ایم، جای خالی را پُر کنید.

$$P(x)=\frac{۴(x-۱)+x^۲}{x(x-۱)(x+۱)}=\frac{۴x-۴+x^۲}{x(x-۱)(x+۱)}$$



کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x-۱}$

می‌دانیم مخرج مشترک این دو کسر برابر است با: $(x-۱)(x+۱)$ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x-۱}=\frac{(x-۱)}{(x+۱)(x-۱)}+\frac{x+۱}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{x-۱+x+۱}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۲x}{(x-۱)(x+۱)}$$

$x^۲-۱$

* ت) $\frac{2x+3}{2x-2}-\frac{5}{x^2-1}-\frac{2x-3}{2x+2}=\frac{2x+3}{2(x-1)}-\frac{5}{(x-1)(x+1)}-\frac{2x-3}{2(x+1)}$

$=\frac{(2x+3)(x+1)-5(2)-(2x-3)(x-1)}{2(x-1)(x+1)}=\frac{2x^2+2x+3x+3-10-2x^2+2x+3x-3}{2(x-1)(x+1)}$

$=\frac{10x-10}{2(x-1)(x+1)}=\frac{5\cdot 10(x-1)}{2(x-1)(x+1)}=\frac{5}{x+1}$

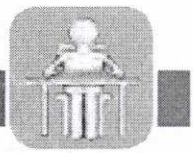
ب) $\frac{y+8}{y^2+y-2}+\frac{y-2}{y^2+2y}=\frac{y+8}{(y+2)(y-1)}+\frac{y-2}{y(y+2)}$

$=\frac{(y+8)(y)}{y(y+2)(y-1)}+\frac{(y-2)(y-1)}{y(y+2)(y-1)}=\frac{y^2+8y+y^2-y-2y+2}{y(y+2)(y-1)}=\frac{2y^2+5y+2}{y(y+2)(y-1)}$

پ) $\frac{4+x^2-2x}{2+x}-\frac{x-2}{1}=\frac{4+x^2-2x+(-x-2)(2+x)}{2+x}$

$=\frac{4+x^2-2x-2x-x^2-4-2x}{2+x}=\frac{-6x}{2+x}$

* ت) $\frac{2x+3}{2x-2}-\frac{5}{x^2-1}-\frac{2x-3}{2x+2}$



تمرین

۱. عبارت‌های گویای زیر به‌ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

الف) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ ب) $\frac{2x^2+1}{x^2+4}$ پ) $\frac{5}{x^2+x}$

ت) $\frac{x^3+3x^2+2x}{x(x+1)(x^2-4)}$ ث) $\frac{3x^2y+6xy^2}{x^2}$ ج) $\frac{42a^3-30a^3m}{am^2-25a}$

چ) $\frac{b^3x^4-ab^3x^3}{a^2b^2x^2-a^3b^2x}$ ح) $\frac{x^6-a^6}{ax^3-a^3x}$

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{4}{9x}-\frac{5x}{6y^2}+1$ ب) $\frac{x+1}{x-1}-1$

پ) $\frac{\frac{1}{m}+1}{m+1}$ ت) $\frac{2x}{x^2-y^2}+\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}$

ث) $\frac{x+3}{x^2-6x+9}-\frac{x+2}{x^2-9}-\frac{5}{3-x}$ ج) $\frac{y-3}{y^2-4}-\frac{y+2}{y^2-4y+4}-\frac{2}{2-y}$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تمرین های صفحه ۲۴

(۱)

ا) $x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0$ ↗ $x-1=0 \Rightarrow x=1$ ↘ $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

به ازای $x=1$, $x=-1$ تعریف شده است.

ب) $x^2+4 \neq 0$ به ازای تمام اعداد تعریف شده است.

پ) $x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0$ ↗ $x=0$ ↘ $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

به ازای $x=0$, $x=-1$ تعریف نشده است.

ت) $x(x+1)(x^2-4)=0$ $x(x+1)(x-2)(x+2)=0$

$x=0$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

به ازای $x=0$, $x=-1$ و $x=2$, $x=-2$ تعریف نشده است.

ث) $x^2=0 \Rightarrow x=0$ به ازای $x=0$ تعریف نشده است.

ج) $am^2-25a=0$ $a(m^2-25)=0$ $a(m-5)(m+5)=0$

$a=0$

$m-5=0 \Rightarrow m=5$

$m+5=0 \Rightarrow m=-5$

به ازای $a=0$, $m=5$, $m=-5$ تعریف نشده است.

چ) $a^2b^2x^2-a^3b^2x=0$ $a^2b^2x(x-a)=0$

- $a^2=0 \Rightarrow a=0$
- $b^2=0 \Rightarrow b=0$
- $x=0$
- $x-a=0 \Rightarrow x=a$

به ازای $a=0$, $b=0$, $x=0$, $x=a$ تعریف نشده است.

ح) $ax^3-a^3x=0 \Rightarrow ax(x^2-a^2)=0$ $ax(x-a)(x+a)=0$

$a=0$

$x=0$

$x-a=0 \Rightarrow x=a$

$x+a=0 \Rightarrow x=-a$

به ازای $a=0$, $x=0$, $x=a$, $x=-a$ تعریف نشده است.

(۲-الف) $\frac{4}{9x} - \frac{5x}{4y^2} + 1 = \frac{4(2y^2)}{2(3x)xy^2} - \frac{5x(3x)}{4y^2(3x)} + \frac{1(18xy^2)}{1(18xy^2)} = \frac{8y^2-15x^2+18xy^2}{18xy^2}$

($9x = 3x \times 3x$, $4y^2 = 2x2y^2$)

ب) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{1} = \frac{x+1}{x-1} - \frac{1(x-1)}{1(x-1)} = \frac{x+1-x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$

ج) $\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{1}}{m+1} = \frac{\frac{1}{m}+\frac{1(m)}{1(m)}}{m+1} = \frac{\frac{1+m}{m}}{\frac{m+1}{1}} = \frac{1(1+m)}{m(1+m)} = \frac{1}{m}$

د) $\frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = \frac{2x}{(x-y)(x+y)} + \frac{1(x-y)}{(x+y)} - \frac{1(x+y)}{(x-y)}$

$= \frac{2x+x-y-x-y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x-2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2}{x+y}$

ت) $\frac{x+3}{x^2-4x+9} - \frac{x+2}{x^2-9} - \frac{5}{3-x} = \frac{(x+3)(x+3)}{(x-3)^2(x+3)} - \frac{(x+2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}$

$- \frac{5(x-3)(x+3)}{-(x-3)(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+4x+9-x^2+x+4+5x^2-45}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{5x^2+5x-30}{(x-3)^2(x+3)}$

ج) $\frac{y-3}{y^2-4} - \frac{y+2}{y^2-4y+4} - \frac{2}{2-y} = \frac{(y-3)(y-2)}{(y-2)(y+2)(y-2)} - \frac{(y+2)(y+2)}{(y-2)^2(y+2)} - \frac{2(y-2)(y+2)}{-(y-2)(y-2)(y+2)}$

$= \frac{y^2-5y+6-y^2-4y-4+2y^2-8}{(y-2)^2(y+2)} = \frac{2y^2-9y-6}{(y-2)^2(y+2)}$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان